# Интегральная формула Коши для кватернионов
# Integral Formula of Cauchy for Quaternions

**Л.Г. Байрак (Украина)**
http://scholium.narod.ru
scholium@rambler.ru

*Предварительные версии этой статьи была опубликованы мною (под ником* ***Scholium****) на форумах* ***dxdy*** *( http://dxdy.ru/post319917.html#p319917 ) и* ***e-science*** *( http://e-science.ru/forum/index.php?showtopic=21283 ).*

Кватернионный анализ существует уже очень продолжительное время, однако лично мне не попадались универсальные эффективные формулы для вычисления функций кватернионного переменного $q \in \mathbb{H}$ - пространству кватернионов Гильберта. В статье [1] дан аналог интегральной формулы Коши в $\mathbb{H}$ и получены другие общие результаты. Однако применение этой формулы для вычисления хотя бы элементарных функций от кватернионного переменного вызывает большие технические трудности. Поэтому мы решили, как сказал некогда классик, «пойти другим путем» .

Сформулируем окончательный результат.

**Теорема об интегральной формуле Коши для кватернионов**
**Theorem about Integral Formula of Cauchy for Quaternions**

Пусть комплексные (собственные) значения $\lambda = q_0 + i|q - q_0|$, $\bar{\lambda} = q_0 - i|q - q_0| \in \mathbb{C}$ кватерниона $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}$, $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ - пространству действительных чисел, $q \neq q_0$, где $|q - q_0| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ и $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$, лежат внутри простого замкнутого контура $\Gamma \subset \mathbb{C}$, ориентированного положительно и пусть функция $f(z)$ непрерывна на $\Gamma$ и аналитична внутри $\Gamma$. Тогда определенно кватернионное значение функции $f(q)$, причем

$$f(q) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\lambda}dz\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\lambda}dz\right), \tag{1}$$

и, следовательно,

$$f(q) = \mathrm{Re}\left(f(\lambda)\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\mathrm{Im}\left(f(\lambda)\right), \tag{2}$$

либо

$$f(q) = \frac{f(\lambda) + f(\bar{\lambda})}{2} + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\frac{f(\lambda) - f(\bar{\lambda})}{2i}. \tag{3}$$

где $\mathrm{Re}$ и $\mathrm{Im}$ – соответственно, действительная и мнимая части от своего выражения, а $i \in \mathbb{C}$ - мнимая комплексная единица.

**Замечание 1.** Аналогичные формулы могут быть выписаны и для другого собственного значения $\bar{\lambda}$ кватерниона $q$. А именно

$$f(q) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\bar{\lambda}}dz\right) - \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\bar{\lambda}}dz\right), \tag{1a}$$

и, следовательно,

$$f(q) = \mathrm{Re}\Big(f(\bar{\lambda})\Big) - \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\mathrm{Im}\Big(f(\bar{\lambda})\Big). \tag{2a}$$

**Доказательство.**

Согласно интегральной формулы Коши для матриц (см., например, [2]), в соответствии с условиями теоремы, для некоторой вещественной или комплексной квадратной матрицы $H$ можно записать:

$$f(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{zE - H}dz, \tag{4}$$

где $E = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Известно (см., например, [3]), что любому кватерниону $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H},\ q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},$ можно поставить в соответствие некоторую комплексную матрицу $H$ второго порядка. А именно

$$H = \begin{pmatrix} z_1, & z_2 \\ -\bar{z}_2, & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1, & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3, & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Вычисляя знаменатель подинтегрального выражения (4), находим

$$zE - H = \begin{pmatrix} z - q_0 - iq_1, & -q_2 - iq_3 \\ q_2 - iq_3, & z - q_0 + iq_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обратная величина этой матрицы будет равна

$$(zE - H)^{-1} = \frac{1}{\det(zE - H)}\begin{pmatrix} z - q_0 + iq_1, & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3, & z - q_0 - iq_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

где детерминант

$$\det(zE - H) = \frac{1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \tag{8}$$

причем, характеристические числа

$$\lambda_1 = \lambda = q_0 + i\,|q - q_0| \tag{9}$$

и

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} = q_0 - i\,|q - q_0|. \tag{10}$$

Таким образом, зная обратную матрицу (7) можно вычислить искомый интеграл (4). Поскольку интеграл от матрицы (4) сводится (по определению) к почленному интегрированию от элементов данной матрицы, то нам предстоит вычислить четыре типа интегралов, подставив в (4) вместо матрицы (7) ее элементы. Покажем, что интегралы для элементов матрицы (7) сводятся к обычным интегралам Коши для аналитической функции $f(z) \in \mathbb{C},$ в особых точках (9)-(10) матрицы $(zE - H)^{-1}.$

Пусть,

$$\alpha_{11} = \frac{z - q_0 + iq_1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}, \tag{11}$$

$$\alpha_{12} = \frac{q_2 + iq_3}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}, \tag{12}$$

$$\alpha_{21} = \frac{-q_2 + iq_3}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}, \tag{13}$$

$$\alpha_{22} = \frac{z - q_0 - iq_1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}. \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)\frac{1}{(z-\lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)\frac{1}{(z-\lambda_2)}, \tag{15}$$

$$\alpha_{12} = \frac{q_3 - iq_2}{2|q-q_0|}\left(\frac{1}{z-\lambda_1} - \frac{1}{z-\lambda_2}\right), \tag{16}$$

$$\alpha_{21} = \frac{q_3 + iq_2}{2|q-q_0|}\left(\frac{1}{z-\lambda_1} - \frac{1}{z-\lambda_2}\right), \tag{17}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)\frac{1}{(z-\lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)\frac{1}{(z-\lambda_2)}. \tag{18}$$

Откуда следует, что (слева стоят определяемые величины)

$$f_{11}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \alpha_{11} f(z)dz = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right) f(\lambda_1) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right) f(\lambda_2), \tag{19}$$

$$f_{12}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \alpha_{12} f(z)dz = \frac{q_3 - iq_2}{2|q-q_0|}\big(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\big), \tag{20}$$

$$f_{21}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \alpha_{21} f(z)dz = \frac{q_3 + iq_2}{2|q-q_0|}\big(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\big), \tag{21}$$

$$f_{22}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \alpha_{22} f(z)dz = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right) f(\lambda_1) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right) f(\lambda_2). \tag{22}$$

Таким образом, мы нашли все (комплексные) компоненты (19)-(22) матрицы $f(H)$ из (4). Наша задача теперь представить эту матрицу в виде структуры, аналогичной матрице (5), что позволит перейти от матричной записи к кватернионной. Для этого достаточно показать, что

$$f_{22}(H) = \overline{f_{11}(H)} \tag{23}$$

и

$$f_{21}(H) = -\overline{f_{12}(H)}, \tag{24}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Действительно, вводя сокращенные обозначения для действительных коэффициентов

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q - q_0|}\right), \tag{25}$$

и

$$b = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q - q_0|}\right), \tag{26}$$

получаем

$$\begin{aligned} \overline{f_{11}(H)} &= \overline{af(\lambda_1) + bf(\lambda_2)} = \overline{af(\lambda_1) + bf(\overline{\lambda_1})} = \overline{af(\lambda_1)} + \overline{bf(\overline{\lambda_1})} = a\,\overline{f(\lambda_1)} + b\,\overline{f(\overline{\lambda_1})} = \\ &= af(\overline{\lambda_1}) + bf(\overline{\overline{\lambda_1}}) = af(\lambda_2) + bf(\lambda_1) = f_{22}(H). \end{aligned} \tag{27}$$

Аналогично находим, для действительных чисел

$$c = \frac{q_3}{2|q - q_0|} \tag{28}$$

и

$$d = \frac{q_2}{2|q - q_0|}, \tag{29}$$

имеем

$$\begin{aligned} \overline{f_{12}(H)} &= \overline{(c - id)(f(\lambda_1) - f(\overline{\lambda_1}))} = \overline{(c - id)}\,\overline{(f(\lambda_1) - f(\overline{\lambda_1}))} = (c + id)(\overline{f(\lambda_1)} - \overline{f(\overline{\lambda_1})}) = \\ &= (c + id)(f(\overline{\lambda_1}) - f(\overline{\overline{\lambda_1}})) = (c + id)(f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) = -(c + id)(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)) = -f_{21}(H) \end{aligned} \tag{30}$$

Следовательно, формулы (23)-(24) доказаны, а значит действительные и мнимые части элементов (19)-(20) матрицы $f(H)$ из формулы (4), в соответствии со структурой кватернионного числа (5), представляют искомые компоненты кватернионной функции $f(q) = f(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) \in \mathbb{H}$. А именно, с учетом того, что $\lambda_1 = \lambda$; $\lambda_2 = \overline{\lambda}$ и используя обозначения (25)-(26), находим

$$\begin{aligned} f_{11}(H) &= af(\lambda) + bf(\overline{\lambda}) = af(\lambda) + b\,\overline{f(\lambda)} = \\ &= a(\mathrm{Re}(f(\lambda)) + i\mathrm{Im}(f(\lambda))) + b(\mathrm{Re}(f(\lambda)) - i\mathrm{Im}(f(\lambda))) = \\ &= (a + b)\mathrm{Re}(f(\lambda)) + i(a - b)\mathrm{Im}(f(\lambda))) \end{aligned} \tag{31}$$

или

$$f_{11}(H) = \mathrm{Re}(f(\lambda)) + i\frac{q_1}{|q - q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda))). \tag{32}$$

Далее, используя обозначения (28)-(29), получаем

$$f_{12}(H)=(c-id)(f(\lambda)-f(\bar{\lambda})=(c-id)\left(f(\lambda)-\overline{f(\lambda)}\right)=(c-id)\left(2i\mathrm{Im}(f(\lambda))\right)= \\ =2(d+ic)\mathrm{Im}(f(\lambda)) \tag{33}$$

или

$$f_{12}(H)=\frac{q_2}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda))+i\frac{q_3}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda)). \tag{34}$$

Теперь, из комплексных чисел (32) и (34) мы можем вычленить действительные и мнимые части как компоненты кватерниона $q=q_0+iq_1+jq_2+kq_3\in\mathbb{H},$ представимого в виде (5). Получаем, что

$$f(q)=\mathrm{Re}(f(\lambda))+i\frac{q_1}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda))+j\frac{q_2}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda))+k\frac{q_3}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda)) \tag{35}$$

или

$$f(q)=\mathrm{Re}(f(\lambda))+\frac{iq_1+jq_2+kq_3}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda))=\mathrm{Re}(f(\lambda))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(f(\lambda)). \tag{36}$$

Тем самым, формула (2) доказана. Если же нам не известно комплексное значение функции $f(\lambda),$ для комплексного собственного значения $\lambda=q_0+i|q-q_0|$ кватерниона $q\in\mathbb{H},$ то тогда мы можем воспользоваться для вычисления $f(\lambda)$ интегральной формулой Коши для комплексного переменного $\lambda$ (см., например, [4]), а именно, в соответствии с условиями теоремы, получим для (2) формулу (1).

Совершенно аналогично получаются формулы (2a) и (1a).

Для завершения доказательства теоремы, нам необходимо еще доказать формулу (3). Однако она получается естественным образом из формулы (2) или (2a), с учетом очевидных свойств комплексных чисел. В самом деле, для любого $z=x+iy\in\mathbb{C},$ где $x,y\in\mathbb{R},$ выполняются условия

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \tag{37}$$

и

$$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}, \tag{38}$$

что, с учетом известного свойства (см., например, [4]) для комплексных аналитических функций $f(z)$, для которых определено значение $f(\bar{z})$,

$$\overline{f(z)}=f(\bar{z}), \tag{39}$$

доказывает данную формулу (3).

Хотя это и завершает доказательство сформулированной теоремы, тем не менее, мы укажем еще на один путь получения формулы (3).

Известно что (см., например, [3]), кватернионы получаются **процедурой удвоения Кэли-Диксона** комплексных чисел. Поэтому, с учетом структуры матрицы кватерниона $f(H)$ из (4), представленной своими компонентами (19)-(22), мы можем записать для нашей кватернионной функции

$$f(q) = f_{11}(H) + f_{12}(H)\, j, \tag{40}$$

где $f_{11}(H)$ и $f_{12}(H)$ – комплексные значения (19)-(20), а кватернионная единица $j \in \mathbb{H}$, причем $ij = k \in \mathbb{H}$. Всю таблицу умножения кватернионных единиц можно посмотреть, например, в [3].

В развернутом виде выражение (40), с учетом (9)-(10) и сокращений (25)-(26) и (28)-(29), будет

$$f(q) = af(\lambda) + bf(\bar{\lambda}) + (c - id)\left( f(\lambda) - f(\bar{\lambda}) \right) j, \tag{41}$$

откуда, после очевидных преобразований, с учетом элементарного тождества $z\,j = j\,\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{H}$, получаем

$$f(q) = \frac{f(\lambda) + f(\bar{\lambda})}{2} + \frac{q - q_0}{|\,q - q_0\,|} \frac{f(\lambda) - f(\bar{\lambda})}{2i}, \tag{42}$$

что является искомой формулой (3). Тем самым, данная теорема полностью доказана. ■

Преимущество записи (3) или (42), перед эквивалентными ей выражениями (2) или (2а), в том, что она не содержит операторы $\mathrm{Re}$ и $\mathrm{Im}$.

**Замечание 2.** Из формул (1), (2), (1а), (2а) или (3) следует, что если кватернион является действительным числом ( $q = q_0$ ), то в мнимой части результирующего кватерниона возникает неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Действительно, комплексно аналитическая функция от действительного числа является действительной или комплексной функцией. Поэтому распространение значений из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в тело кватернионов $\mathbb{H}$ вполне может быть неоднозначным. Таким образом, случай равенства кватерниона действительному числу, требует особого рассмотрения. ■

Полученные формулы (1)-(2) и сопряженные им формулы (1а)-(2а), а также формула (3) позволяют эффективно вычислять аналитические в $\mathbb{C}$ функции от кватернионов. Вот несколько примеров.

**Примеры.**

Пусть, для определенности,

$$q = 1 + i2 + j3 + k4 \in \mathbb{H}. \tag{43}$$

Для значения (43) имеем

$$|\,q\,| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}, \tag{44}$$

$$q_0 = 1, \tag{45}$$

$$q - q_0 = i2 + j3 + k4, \tag{46}$$

$$|\,q - q_0\,| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}, \tag{47}$$

$$\lambda = q_0 + i\,|q - q_0| = 1 + i\sqrt{29}. \tag{48}$$

$$\bar{\lambda} = q_0 - i\,|q - q_0| = 1 - i\sqrt{29}. \tag{49}$$

**1. Экспонента от кватерниона** $e^q$
**Quaternion Exponent** $e^q$

По формуле (2) находим

$$e^{q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} = \mathrm{Re}(e^{q_0 + i|q - q_0|}) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\mathrm{Im}(e^{q_0 + i|q - q_0|}) \tag{50}$$

или

$$e^q = e^{q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} = e^{q_0}\left(\cos(|q - q_0|) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\sin(|q - q_0|)\right). \tag{51}$$

Отсюда находим выражения для отдельных кватернионных единиц:

$$e^{iq_1} = \cos(q_1) + i\sin(q_1), \tag{52}$$

$$e^{jq_2} = \cos(q_2) + j\sin(q_2), \tag{53}$$

$$e^{kq_3} = \cos(q_3) + k\sin(q_3). \tag{54}$$

Легко заметить неравенство для выражения:

$$e^{q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} \neq e^{q_0} e^{iq_1} e^{jq_2} e^{kq_3}. \tag{55}$$

что совершенно естественно, в силу некоммутивности кватернионных единиц, а, следовательно, и соответствующих им матриц. Существует теорема, что равенство в выражении (55) выполняется тогда и только тогда, когда соответствующие матричные единицы коммутируют между собой. Отметим, однако, что единичная матрица коммутирует со всеми матрицами, поэтому выражение (55) лучше рассматривать как неравенство

$$e^{iq_1 + jq_2 + kq_3} \neq e^{iq_1} e^{jq_2} e^{kq_3}. \tag{56}$$

Для численных значений (43)-(47) получаем из (51)

$$e^{1 + i2 + j3 + k4} = e\left(\cos(\sqrt{29}) + \frac{i2 + j3 + k4}{\sqrt{29}}\sin(\sqrt{29})\right). \tag{57}$$

**2. Натуральный логарифм от кватерниона** $\ln(q)$
**Quaternion Natural Logarithm** $\ln(q)$

Из формулы (2) получаем

$$\ln(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) = \mathrm{Re}(\ln(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\mathrm{Im}(\ln(q_0 + i\,|q - q_0|)) \tag{58}$$

или

$$\ln(q)=\ln(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\ln(|q|)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\arg(q_0+i|q-q_0|), \tag{59}$$

где

$$\arg(\lambda)=\arg(q_0+i|q-q_0|)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{|q-q_0|}{q_0}\right),\ q_0>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{|q-q_0|}{q_0}\right),\ q_0<0\ .\end{cases} \tag{60}$$

Для численных значений (43)-(48) получаем из (60)

$$\arg(\lambda)=\arg(q_0+i|q-q_0|)=\operatorname{arctg}\left(\frac{|q-q_0|}{q_0}\right)=\operatorname{arctg}(\sqrt{29}). \tag{61}$$

Также из (59) и (61) находим, что

$$\ln(1+i2+j3+k4)=\ln(30)+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\operatorname{arctg}(\sqrt{29}). \tag{62}$$

**3. Квадратный корень от кватерниона $\sqrt{q}$**
**Quaternion Square Root $\sqrt{q}$**

Согласно формулы (2)

$$\sqrt{q_0+iq_1+jq_2+kq_3}=\operatorname{Re}(\sqrt{q_0+i|q-q_0|})+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\operatorname{Im}(\sqrt{q_0+i|q-q_0|}) \tag{63}$$

или

$$\sqrt{q}=\sqrt{q_0+iq_1+jq_2+kq_3}=\pm\left(\sqrt{\frac{|q|+q_0}{2}}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\sqrt{\frac{|q|-q_0}{2}}\right). \tag{64}$$

Кстати, легко проверить, что квадрат выражения (64) равен $q$.

Для численных значений (43)-(47) получаем из (64)

$$\sqrt{q}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{30}+1}{2}}+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\sqrt{\frac{\sqrt{30}-1}{2}}\right). \tag{65}$$

**4. Квадрат кватерниона $q^2$**
**Square of Quaternion $q^2$**

По формуле (2) имеем

$$(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^2=\operatorname{Re}((q_0+i|q-q_0|)^2)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\operatorname{Im}((q_0+i|q-q_0|)^2) \tag{66}$$

или

$$q^2=(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^2=q_0^2-|q-q_0|^2+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}2q_0|q-q_0|, \tag{67}$$

откуда следует, что

$$q^2=(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^2=2q_0q-q_0^2-|q-q_0|^2 \tag{68}$$

или

$$q^2=(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^2=2q_0q-|q|^2\,. \tag{69}$$

Подставляя в (69) численные значения (43)-(47), находим

$$(1+i2+j3+k4)^2=-28+i4+j6+k8. \tag{70}$$

**5. Синус кватерниона** $\sin(q)$
**Sinus of Quaternion** $\sin(q)$

Из формулы (2) получаем

$$\sin(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{Re}(\sin(q_0+i\,|q-q_0|))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(\sin(q_0+i\,|q-q_0|)) \tag{71}$$

или

$$\sin(q)=\sin(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\sin(q_0)\mathrm{ch}(|q-q_0|)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\cos(q_0)\mathrm{sh}(|q-q_0|), \tag{72}$$

откуда следует, что для значений (43)-(47)

$$\sin(1+i2+j3+k4)=\sin(1)\mathrm{ch}(\sqrt{29})+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\cos(1)\mathrm{sh}(\sqrt{29}). \tag{73}$$

**6. Косинус кватерниона** $\cos(q)$
**Cosine of Quaternion** $\cos(q)$

Из формулы (2) находим

$$\cos(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{Re}(\cos(q_0+i\,|q-q_0|))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\mathrm{Im}(\cos(q_0+i\,|q-q_0|)) \tag{74}$$

или

$$\cos(q)=\cos(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\cos(q_0)\mathrm{ch}(|q-q_0|)-\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\sin(q_0)\mathrm{sh}(|q-q_0|), \tag{75}$$

откуда получаем, что для значений (43)-(47)

$$\cos(1+i2+j3+k4)=\cos(1)\mathrm{ch}(\sqrt{29})-\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\sin(1)\mathrm{sh}(\sqrt{29}). \tag{76}$$

**7. Тангенс кватерниона** $\mathrm{tg}(q)$

**Tangent of Quaternion** $\mathrm{tg}(q)$

Из формулы (2) имеем

$$\mathrm{tg}(q)=\mathrm{tg}(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{Re}(\mathrm{tg}(q_0+i\,|\,q-q_0\,|))+\frac{q-q_0}{|\,q-q_0\,|}\mathrm{Im}(\mathrm{tg}(q_0+i\,|\,q-q_0\,|)) \tag{77}$$

или

$$\mathrm{tg}(q)=\frac{1}{\cos^2(q_0)+\mathrm{sh}^2(|\,q-q_0\,|)}\left(\sin(q_0)\,\cos(q_0)+\frac{q-q_0}{|\,q-q_0\,|}\mathrm{sh}(|\,q-q_0\,|)\mathrm{ch}(|\,q-q_0\,|)\right), \tag{78}$$

откуда находим, что для значений (43)-(47)

$$\mathrm{tg}(q)=\frac{1}{\cos^2(1)+\mathrm{sh}^2(\sqrt{29})}\left(\sin(1)\,\cos(1)+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\mathrm{sh}(\sqrt{29})\mathrm{ch}(\sqrt{29})\right). \tag{79}$$

**8. Гиперболический синус кватерниона** $\mathrm{sh}(q)$

**Hyperbolic Sinus of Quaternion** $\mathrm{sh}(q)$

Из формулы (2) получаем

$$\mathrm{sh}(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{Re}(\mathrm{sh}(q_0+i\,|\,q-q_0\,|))+\frac{q-q_0}{|\,q-q_0\,|}\mathrm{Im}(\mathrm{sh}(q_0+i\,|\,q-q_0\,|)) \tag{80}$$

или

$$\mathrm{sh}(q)=\mathrm{sh}(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{sh}(q_0)\,\cos(|\,q-q_0\,|)+\frac{q-q_0}{|\,q-q_0\,|}\mathrm{ch}(q_0)\,\sin(|\,q-q_0\,|), \tag{81}$$

откуда следует, что для значений (43)-(47)

$$\mathrm{sh}(1+i2+j3+k4)=\mathrm{sh}(1)\,\cos(\sqrt{29})+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\mathrm{ch}(1)\,\sin(\sqrt{29}). \tag{82}$$

**9. Гиперболический косинус кватерниона** $\mathrm{ch}(q)$

**Hyperbolic Cosine of Quaternion** $\mathrm{ch}(q)$

Из формулы (2) находим

$$\mathrm{ch}(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{Re}(\mathrm{ch}(q_0+i\,|\,q-q_0\,|))+\frac{q-q_0}{|\,q-q_0\,|}\mathrm{Im}(\mathrm{ch}(q_0+i\,|\,q-q_0\,|)) \tag{83}$$

или

$$\mathrm{ch}(q)=\mathrm{ch}(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\mathrm{ch}(q_0)\,\cos(|\,q-q_0\,|)+\frac{q-q_0}{|\,q-q_0\,|}\mathrm{sh}(q_0)\,\sin(|\,q-q_0\,|), \tag{84}$$

откуда получаем, что для значений (43)-(47)

$$\operatorname{ch}(1+i2+j3+k4)=\operatorname{ch}(1)\cos(\sqrt{29})+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\operatorname{sh}(1)\sin(\sqrt{29}). \tag{85}$$

## 10. Гиперболический тангенс кватерниона $\operatorname{th}(q)$
## Hyperbolic Tangent of Quaternion $\operatorname{th}(q)$

Из формулы (2) имеем

$$\operatorname{th}(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)=\operatorname{Re}(\operatorname{th}(q_0+i\,|q-q_0|))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\operatorname{Im}(\operatorname{th}(q_0+i\,|q-q_0|)) \tag{86}$$

или

$$\operatorname{th}(q)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(q_0)+\sin^2(|q-q_0|)}\left(\operatorname{sh}(q_0)\operatorname{ch}(q_0)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\sin(|q-q_0|)\cos(|q-q_0|)\right), \tag{87}$$

откуда находим, что для значений (43)-(47)

$$\operatorname{th}(1+i2+j3+k4)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(1)+\sin^2(\sqrt{29})}\left(\operatorname{sh}(1)\operatorname{ch}(1)+\frac{i2+j3+k4}{\sqrt{29}}\sin(\sqrt{29})\cos(\sqrt{29})\right). \tag{88}$$

## 11. Обратный кватернион $q^{-1}$
## Inversion of Quaternion $q^{-1}$

По формуле (2) находим

$$(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^{-1}=\operatorname{Re}((q_0+i\,|q-q_0|)^{-1})+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\operatorname{Im}((q_0+i\,|q-q_0|)^{-1}) \tag{89}$$

или

$$q^{-1}=(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^{-1}=\frac{1}{|q|^2}\left(q_0-\frac{q-q_0}{|q-q_0|}\,|q-q_0|\right), \tag{90}$$

откуда следует, что

$$q^{-1}=(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^{-1}=\frac{2q_0-q}{|q|^2} \tag{91}$$

или, с учетом определения сопряженного кватерниона

$$\overline{q}=q_0-iq_1-jq_2-kq_3, \tag{92}$$

получаем

$$q^{-1}=(q_0+iq_1+jq_2+kq_3)^{-1}=\frac{\overline{q}}{|q|^2}, \tag{93}$$

что, впрочем, легко получить непосредственным вычислением.

Подставляя в (93) численные значения (43)-(47) и (92), находим

$$(1+i2+j3+k4)^{-1}=\frac{1}{30}(1-i2-j3-k4). \tag{94}$$

**Замечание 3.** Как хорошо видно, зная действительную и мнимую части некоторой комплексной аналитической функции либо значения этой функции для некоторых двух заданных сопряженных комплексных чисел, можно легко вычислить значение этой функции на любом кватернионе. ■

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sudbery. Quaternionic Analyses. Dep. of Math. University of York Heslington. Aug. 1977. (Перевод: Энтони Садбери. Кватернионный анализ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 2, 2004.)
2. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. 2004.
3. В.В. Сильвестров. Системы чисел. 1998.
4. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. 1987.